системе:

$$\begin{cases} d\bar{\nu}^i_n + \bar{\nu}^s_n \bar{\omega}^i_s - \bar{\nu}^i_n \bar{\omega}^n_n + \bar{\omega}^i_n = \bar{\nu}^i_{nk} \bar{\omega}^k_0, \\ d\bar{\nu}^0_n + \bar{\nu}^0_n (\bar{\omega}^0_0 - \bar{\omega}^n_n) + \bar{\nu}^s_n \bar{\omega}^0_s + \bar{a}^v_n \bar{\omega}^0_v + \bar{\omega}^0_n = \bar{\nu}^0_{nk} \bar{\omega}^k_0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\bar{a}^v_n = b^{vu}_n a^0_u$, $\bar{\nu}^i_{nk} = -\Lambda^{is}_n \nu^0_{sk}$, $\bar{\nu}^0_{nk} = \nu^0_{nk}$.

Сравнивая уравнения (6) и (10), имеем следующее предложение.

Т е о р е м а. Оснащение в смысле Э.Бортолотти гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ полем гиперплоскостей (7) равносильно оснащению в смысле Э.Картана ее двойственного образа $\overline{H}_m$ полем плоскостей $\overline{N}_{n-m-1}(\bar{\nu})$ с осью Кенигса, определяемым полями объектов (9).

### Библиографический список


1. С т о л я р о в А.В. Двойственная теория регулярной гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1988. Вып.19. С.88-93.

2. К а р т а н Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. 210 с.

3. Cartan E. Leçons sur la theorie des espaces a connexion projective. Paris, 1937.

4. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1950. Вып.8. С.197-272.

5. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

6. С т о л я р о в А.В. Двойственные нормальные связности на регулярной гиперполосе / Чувашский пед. ин-т. 28 с. Деп. в ВИНИТИ 10.11.87. № 8231-В87.

7. Cartan E. Les éspaces á connexion projective // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1937. Вып.4. С.147-159.

8. Bortolotti E. Connessioni nelle varietá luogo di spazi; applicazione alla geometria di rette // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933. V.3. P. 81-89.




УДК 514.75

# О ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ


В.П.Т о л с т о п я т о в

(Свердловский педагогический институт)


В работе изучаются векторные поля постоянной длины на гладкой поверхности евклидова пространства.

1. Пусть в $n$-мерном евклидовом пространстве $E_n$ задана $p$-поверхность $V_p$. Присоединим к ней подвижной репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, где векторы $\vec{e}_i$ $(i=1,\dots,p)$ принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ к поверхности $V_p$ в точке $x$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha = p+1,\dots,n)$ образуют базис нормального пространства $N_x(V_p)$. Имеем

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega^j_i \vec{e}_j + \omega^\alpha_i \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega^j_\alpha \vec{e}_j + \omega^\beta_\alpha \vec{e}_\beta. \tag{1}$$

При этом внешние формы, участвующие в формулах (I), удовлетворяют известным уравнениям структуры пространства $E_n$.

Пусть $\vec{\xi} = \xi^i \vec{e}_i$ - векторное поле на гладкой поверхности. Имеем

$$d\xi^i + \xi^j \omega^i_j = \mu^i_k \omega^k. \tag{2}$$

Ковариантные производные координат векторного поля

$$\mu^k_i = \nabla_{\vec{e}_i} \xi^k \tag{3}$$

образуют поле аффинора на поверхности $V_p$. Дифференцируя (2) внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$d\mu^k_i = \mu^k_t \omega^t_i - \mu^t_i \omega^k_t + \vec{b}_{il} \vec{b}_{sj} \xi^l \gamma^{sk} \omega^j - \mu^k_{ij} \omega^j. \tag{4}$$

Таким образом, вместе с векторным полем на поверхности определяется поле тензора $\mu^k_{ij}$, симметричного по нижним индексам. Имеем на поверхности $V_p$ отображение направлений

$$\mu: T_x(V_p) \to T_x(V_p), \quad \mu(\vec{t}) = \mu^k_{ij} t^i t^j \vec{e}_k.$$

2. Векторное поле $\vec{\xi}$ имеет постоянную длину тогда и только тогда, когда $\vec{\xi} \cdot d\vec{\xi} = 0$ или

$$\xi^l \vec{e}_l (\mu^k_i \vec{e}_k + b^\alpha_{ij} \xi^j \vec{e}_\alpha) = 0.$$

Имеем

$$\mu_i^k \xi^\ell \gamma_{k\ell} = 0. \qquad (5)$$

Условия (5) необходимы и достаточны для того, чтобы $\vec{\xi}$ было векторным полем постоянной длины.

Т е о р е м а 1. Направление поля постоянной длины переносится параллельно по своим интегральным линиям тогда и только тогда, когда поле является геодезическим.

Действительно, пусть направление поля $\vec{\xi}$ переносится параллельно по своим интегральным линиям:

$$\mu_i^k \xi^i = \lambda \xi^k. \qquad (6)$$

Свернув (5) с $\xi^i$ и учитывая (6), имеем $\lambda \vec{\xi}^2 = 0$. Отсюда $\lambda = 0$, т.е. $\vec{\xi}$ - геодезическое векторное поле:

$$\mu_i^k \xi^i = 0. \qquad (7)$$

Обратно, если $\vec{\xi}$ - геодезическое векторное поле, то, по определению, направление поля переносится параллельно по его интегральным линиям.

Т е о р е м а 2. Градиентное векторное поле имеет постоянную длину тогда и только тогда, когда оно является геодезическим.

Пусть $\vec{\xi}$ - градиентное векторное поле:

$$\mu_i^k \gamma_{kj} - \mu_j^k \gamma_{ki} = 0. \qquad (8)$$

Свернув (8) с $\xi^j$, получаем $\mu_i^k \xi^j \gamma_{kj} - \mu_j^k \xi^j \gamma_{ki} = 0$. Откуда следует равносильность условий (5) и (7), что и доказывает теорему 2.

О п р е д е л е н и е. Направление $\vec{t}$ на поверхности называется $\vec{\xi}$ -главным, если $\mu(\vec{t}) = 0$.

Т е о р е м а 3. Направление векторного поля $\vec{\xi}$ постоянной длины является $\vec{\xi}$ -главным тогда и только тогда, когда интегральные линии поля $\vec{\xi}$ - прямые.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя (5), имеем

$$b_{it} b_{js} \xi^t \xi^s - \mu_{ij}^k \xi^\ell \gamma_{k\ell} + \mu_i^k \mu_j^\ell \gamma_{k\ell} = 0. \qquad (9)$$

Свернув (9) с $\xi^i$ и $\xi^j$, имеем

$$\mu(\vec{\xi}) \cdot \vec{\xi} = (b_{ij} \xi^i \xi^j)^2 + (\mu_i^k \xi^i \vec{e}_k)^2.$$

Таким образом, если $\vec{\xi}$ является $\vec{\xi}$ -главным ($\mu(\vec{\xi}) = 0$), то векторное поле является одновременно асимптотическим ($b_{ij}\xi^i\xi^j=0$) и геодезическим ($\mu_i^k \xi^i = 0$), а значит интегральные линии поля $\vec{\xi}$ -прямые.

Обратно, пусть интегральные линии поля постоянной длины - прямые. Тогда интегральные линии поля являются асимптотическими и геодезическими и в силу теоремы I поле является геодезическим, т.е. имеют место условия (7). Дифференцируя их и учитывая, что $\vec{\xi}$ - геодезическое и асимптотическое, имеем

$$\mu_{ij}^k \xi^i - \mu_i^k \mu_j^i = 0. \qquad (10)$$

Свернув (10) с $\xi^j$ и учтя (7), получим $\mu_{ij}^k \xi^i \xi^j = 0$, т.е. $\vec{\xi}$ является $\vec{\xi}$ -главным.

3. Векторному полю $\vec{\xi}$ соответствует секущая поверхность, уравнение которой: $\vec{\bar{x}} = \vec{x} + \vec{\xi}$. Рассматриваем случай невырожденной секущей поверхности $\bar{V}_p$. Имеем отображение

$$f: V_p \to \bar{V}_p, \quad f(x) = \bar{x}.$$

Векторы

$$\vec{a}_i = c_i^k \vec{e}_k + b_{ij}^\alpha \xi^j \vec{e}_\alpha, \qquad (11)$$

где $c_i^k = \delta_i^k + \mu_i^k$, образуют базис касательного пространства $T_{\bar{x}}(\bar{V}_p)$.

Т е о р е м а 4. Ненулевое векторное поле постоянной длины не может быть ортогонально секущей поверхности.

Действительно, из условий $\vec{\xi}\vec{a}_i = 0$ и (5) следует, что $\xi^k = 0$, т.е. $\vec{\xi}$ - нулевое векторное поле.

Т е о р е м а 5. Для векторного поля постоянной длины $f_*(\vec{\xi}) = \vec{\xi}$ тогда и только тогда, когда интегральные линии поля $\vec{\xi}$ - прямые.

Действительно, если $f_*(\vec{\xi}) = \xi^i \vec{a}_i$ совпадает с $\vec{\xi}$, то

$$b_{ij}^\alpha \xi^i \xi^j = 0, \quad \mu_i^k \xi^i = 0, \qquad (12)$$

т.е. $\vec{\xi}$ является одновременно асимптотическим и геодезическим векторным полем. Значит его интегральные линии являются прямыми. Обратно, если интегральные линии поля $\vec{\xi}$ - прямые, то $\vec{\xi}$ является асимптотическим и его направление переносится параллельно по интегральным линиям. Тогда в силу теоремы 1 поле является геодезическим. Имеем $f_*(\vec{\xi}) = \xi^i \vec{a}_i = \vec{\xi}$.

С л е д с т в и е. Интегральные линии поля постоянной длины - прямые тогда и только тогда, когда отображение $f$ изометрично вдоль них.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 5 следует, что интегральные линии поля $\vec\xi$ – прямые тогда и только тогда, когда $\vec{\bar\xi}=\vec\xi$. Отсюда следует, что $f$ изометрично вдоль интегральных линий поля $\vec\xi$. Обратно, если $f$ изометрично вдоль интегральных линий поля $\vec\xi$, то $\vec\xi^2=\vec{\bar\xi}^2$ или

$$\vec\xi^2=(\vec\xi+\mu^k_i\xi^i\vec e_k+\vec b_{ij}\xi^i\xi^j)^2$$

Отсюда

$$(\mu^k_i\xi^i\vec e_k)^2+2\mu^k_i\xi^i\xi^\ell\gamma_{k\ell}+(\vec b_{ij}\xi^i\xi^j)^2=0. \qquad (13)$$

Учитывая, что $\vec\xi$ постоянной длины, из (13) получим

$$(\mu^k_i\xi^i\vec e_k)^2+(\vec b_{ij}\xi^i\xi^j)^2=0.$$

Тогда $\mu^k_i\xi^i=0$ и $b^\alpha_{ij}\xi^i\xi^j=0$, т.е. интегральные линии поля $\vec\xi$ -прямые.

Т е о р е м а 6. Чтобы в случае векторного поля постоянной длины $\vec\xi$ и $f_*(\vec\xi)$ определяли на поверхности двумерное распределение, инвариантное при отображении $f_*$, необходимо и достаточно, чтобы $\vec\xi$ было асимптотическим и чтобы существовало векторное поле $\vec t$, неколлинеарное $\vec\xi$, сопряженное с ним, и такое, что

$$\nabla_{\vec\xi}\vec\xi=(\alpha-1)\vec\xi+\beta\vec t \quad (\beta\neq0),\quad \nabla_{\vec t}\vec\xi=\vec\xi-\vec t.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того, что $\Delta_2=\Delta(\vec\xi,\vec{\bar\xi})$ - распределение на поверхности $V_p$, следует, что вектор $\vec{\bar\xi}=\xi^i\vec a_i$ лежит на касательной плоскости $T_x(V_p)$. Отсюда $b^\alpha_{ij}\xi^i\xi^j=0$, т.е. $\vec\xi$ - асимптотическое векторное поле. Если $\Delta_2$ инвариантно при отображении $f_*$, то $\vec{\bar\xi}\in T_{\bar x}(\bar V_p)$, т.е. $\vec{\bar\xi}=t^i\vec{\bar a}_i$ или

$$\xi^i\vec e_i=t^k c^i_k\vec e_i+\vec b_{ij}t^i\xi^j. \qquad (14)$$

Отсюда следует, что на $V_p$ существует векторное поле $\vec t$, сопряженное с $\vec\xi$, и такое, что $\nabla_{\vec t}\vec\xi=\vec\xi-\vec t$. Так как $f_*(\vec t)=\vec{\bar\xi}$, то в силу инвариантности $\Delta_2$ следует, что $\vec t\in\Delta_2$. При этом $\vec t$ и $\vec\xi$ неколлинеарны. В противном случае имеем $\vec\xi=\alpha\vec t$ и $f_*(\vec\xi)=\alpha f_*(\vec t)$, т.е. $\vec{\bar\xi}=\alpha\vec\xi$. Отсюда $\mu^k_i\xi^i=(\alpha-1)\xi^k$ и в силу теоремы 1 получаем, что $\alpha-1=0$, т.е. $\vec{\bar\xi}=\vec\xi$. Тогда $\vec\xi$ и $\vec{\bar\xi}$ не определяют двумерного распределения. Итак, имеем $\Delta_2=\Delta(\vec\xi,\vec t)$. Так как $\vec{\bar\xi}\in\Delta_2$, то

$$\vec{\bar\xi}=\alpha\vec\xi+\beta\vec t. \qquad (15)$$

При этом $\beta\neq0$, т.к. в противном случае $\Delta_2$ вырождается.



Из (15) следует $c^k_i\xi^i=\alpha\xi^k+\beta t^k$ или

$$\nabla_{\vec\xi}\vec\xi=(\alpha-1)\vec\xi+\beta\vec t. \qquad (16)$$

Обратно, пусть $\vec\xi$ асимптотическое векторное поле, а это значит, что $\vec{\bar\xi}\in T_x(V_p)$. Если на $V_p$ существует векторное поле $\vec t$, неколлинеарное $\vec\xi$, сопряженное с ним, и такое, что

$$\nabla_{\vec t}\vec\xi=\vec\xi-\vec t,\quad \nabla_{\vec\xi}\vec\xi=(\alpha-1)\vec\xi+\beta\vec t\quad(\beta\neq0), \qquad (17)$$

то имеем

$$\vec{\bar\xi}=t^i\vec{\bar a}_i=f_*(\vec t), \qquad (18)$$

$$\vec{\bar\xi}=\alpha\vec\xi+\beta\vec t. \qquad (19)$$

Таким образом, на $V_p$ имеем распределение $\Delta_2=\Delta(\vec\xi,\vec t)$ такое, что $f_*(\vec t)=\vec{\bar\xi}\in\Delta_2$ и $f_*(\vec\xi)=\vec{\bar\xi}\in\Delta_2$. В силу линейности $f_*$ имеем $f_*(\Delta_2)=\Delta_2$. При этом $\vec{\bar\xi}$ неколлинеарен $\vec\xi$, т.к. $\beta\neq0$. Поэтому $\Delta_2=\Delta(\vec\xi,\vec{\bar\xi})$.

С л е д с т в и е. Если в условии теоремы 5 $\alpha=0$, то $f_*(\vec{\bar\xi})=\vec\xi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (19) при $\alpha=0$ следует $\vec{\bar\xi}=\beta\vec t$ или

$$t^k=\frac{1}{\beta}(\mu^k_i+\delta^k_i)\xi^i,\quad \beta\neq0.$$

Тогда из (18) получим

$$\beta\xi^k=(\mu^k_i+\delta^k_i)(\mu^i_t+\delta^i_t)\xi^t.$$

Отсюда

$$\mu^k_i\mu^i_t\xi^t+2\mu^k_t\xi^t=(\beta-1)\xi^k.$$

Свернув последнее с $\xi^s\gamma_{sk}$ и учитывая, что $\vec\xi$ постоянной длины, получим $(\beta-1)\vec\xi^2=0$. Таким образом, $\beta=1$, $\vec{\bar\xi}=\vec t$. В силу (18) имеем $f_*(\vec{\bar\xi})=\vec\xi$.

Т е о р е м а 7. Если $\vec\xi$ и $\vec{\bar\xi}$ определяют двумерное распределение на $V_p$ такое, что $f_*(\vec{\bar\xi})=\vec\xi$, то отображение $f$ изометрично вдоль направлений, координаты которых в базисе $\{\vec\xi,\vec{\bar\xi}\}$ отличаются только знаком.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec\ell\in\Delta_2=\Delta(\vec\xi,\vec{\bar\xi})$ и $f_*(\vec{\bar\xi})=\vec\xi$. Тогда $\vec\ell=\sigma\vec\xi+\delta\vec{\bar\xi}$ и $\vec{\bar\ell}=\sigma\vec{\bar\xi}+\delta\vec\xi$.

Имеем

$$\vec\ell^2=\sigma^2\vec\xi^2+2\sigma\delta\vec\xi\vec{\bar\xi}+\delta^2\vec{\bar\xi}^2,$$

$$\vec{\bar\ell}^2=\sigma^2\vec{\bar\xi}^2+2\delta\sigma\vec\xi\vec{\bar\xi}+\delta\vec\xi^2.$$

Таким образом, $\vec\ell^2=\vec{\bar\ell}^2$ тогда и только тогда, когда

$$(\sigma^2-\delta^2)(\vec{\xi}^2-\vec{\xi}^{*2})=0.$$

Отсюда либо $|\vec{\xi}|=|\vec{\xi}^*|$, либо $|\sigma|=|\delta|$. Но $|\vec{\xi}|=|\vec{\xi}^*|$ тогда и только тогда, когда интегральные линии поля $\vec{\xi}$-прямые, т.е. $\vec{\xi}=\vec{\xi}^*$, а значит $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}^*$ не определяют двумерного распределения на поверхности. Таким образом, в рассматриваемом случае $|\vec{e}|=|\vec{e}^*|$ тогда и только тогда, когда $|\sigma|=|\delta|$.

УДК 514.75

## К ГЕОМЕТРИИ ДИФФЕОМОРФНЫХ $n$-ПОВЕРХНОСТЕЙ В $E_{2n}$

М.А.Чешкова

(Алтайский государственный университет)

В евклидовом пространстве $E_{2n}$ изучаются связности, ассоциированные с парой диффеоморфных $n$-поверхностей.

Пусть $M, M'$ - гладкие $n$-поверхности в $E_{2n}$, $f: M\to M'$ - диффеоморфизм, $p\in M$, $q=f(p)\in M'$. Перенесем векторы $(dfX)_q$, где $X_p\in T_pM$, параллельно в точку $p=f^{-1}(q)$ и разложим на касательные и нормальные составляющие. Таким образом, имеем

$$dfX=FX+\omega X,$$

где

$$(FX)_p\in T_p(M),\quad (\omega X)_p\in T_p^{\perp}M,\quad X\in TM$$

Если

$$\operatorname{rang} F_p=n,\quad \operatorname{rang}\omega_p=n,\quad \forall p\in M,$$

то на $M$ определятся связности

$$\overset{F}{\nabla}_X Y=F^{-1}\nabla^0_X FY,\quad \overset{\omega}{\nabla}_X Y=\omega^{-1}\nabla^{\perp}_X\omega Y, \tag{I}$$

где $\nabla^0$ - связность Леви-Чивита, $\nabla^{\perp}$ - нормальная связность [1] поверхности $M$.

На поверхности $M$ определим метрики

$$\overset{F}{g}(X,Y)=g(FX,FY),$$
$$\overset{\omega}{g}(X,Y)=g^{\perp}(\omega X,\omega Y),$$
$$\tilde{g}=\overset{F}{g}+\overset{\omega}{g},$$

где $g$, $g^{\perp}$ - метрики, индуцированные на $M$ метрикой $G$ пространства $E_{2n}$. Очевидно,

$$\tilde{g}(X,Y)=G(dfX,dfY).$$

Т е о р е м а 1. Связность $\overset{F}{\nabla}$ согласована с метрикой $\overset{F}{g}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(\overset{F}{\nabla}_Z\overset{F}{g})(X,Y)=Z\overset{F}{g}(X,Y)-$

$$-\overset{F}{g}(\overset{F}{\nabla}_Z X,Y)-\overset{F}{g}(X,\overset{F}{\nabla}_Z Y)=g(\nabla^0_Z FX,FY)+g(FX,\nabla^0_Z FY)-g(F\overset{F}{\nabla}_Z X,FY)-$$
$$-g(FX,F\overset{F}{\nabla}_Z Y)=0$$

в силу (I).

Поле $F$ называется полем Кодацци (в связности $\nabla^0$) [2], если

$$(\nabla^0_X F)(Y)=(\nabla^0_Y F)(X).$$

Так как тензор кручения

$$\overset{F}{T}(X,Y)=\overset{F}{\nabla}_X Y-\overset{F}{\nabla}_Y X-[X,Y]$$

связности $\overset{F}{\nabla}$ имеет вид

$$\overset{F}{T}(X,Y)=F^{-1}\left((\nabla^0_X F)(Y)-(\nabla^0_Y F)(X)\right),$$

то получим

С л е д с т в и е 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) $F$ - поле Кодацци в связности $\nabla^0$; 2) $\overset{F}{\nabla}$ - связность Леви-Чивита, определяемая метрикой $\overset{F}{g}$.

Аналогично доказывается

Т е о р е м а 2. Связность $\overset{\omega}{\nabla}$ согласована с метрикой $\overset{\omega}{g}$.

Рассмотрим ковариантную производную $\omega$ в связности $\nabla^0\oplus\nabla^{\perp}$

$$(\mathcal{D}_X\omega)(Y)=\nabla^{\perp}_X\omega Y-\omega(\nabla^0_X Y).$$

Дадим следующее

О п р е д е л е н и е. Поле $\omega$ называется полем Кодацци в связности $\nabla^0\oplus\nabla^{\perp}$, если $(\mathcal{D}_X\omega)(Y)=(\mathcal{D}_Y\omega)(X)$.

Так как тензор кручения $\overset{\omega}{T}$ связности $\overset{\omega}{\nabla}$ имеет вид

$$\overset{\omega}{T}(X,Y)=\omega^{-1}\left((\mathcal{D}_X\omega)(Y)-(\mathcal{D}_Y\omega)(X)\right),$$

то получим

С л е д с т в и е 2. Следующие утверждения эквивалентны: 1) $\omega$ - поле Кодацци в связности $\nabla^0\oplus\nabla^{\perp}$; 2) $\overset{\omega}{\nabla}$ - связность Леви-Чивита, определяемая метрикой $\overset{\omega}{g}$.

Рассмотрим среднюю связность $\overset{c}{\nabla}=\frac{1}{2}(\overset{F}{\nabla}+\overset{\omega}{\nabla})$.

Т е о р е м а 3. Имеет место равенство